Étude d'une fonction et calcul d'aire

Énoncé **12 points · environ 25 min**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

a) Déterminer le zéro de f et étudier le signe de $f(x)$. **(2 pts)**

b) Calculer $f'(x)$, dresser le tableau de variation de f et donner les coordonnées exactes de son extremum. **(4 pts)**

c) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. **(2 pts)**

d) Vérifier que $F(x) = -(2x + 1)\,\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f, puis calculer l'aire du domaine compris entre le graphe de f, l'axe des abscisses et les droites $x = \frac{1}{2}$ et $x = 3$. Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au millième. **(4 pts)**

Corrigé détaillé

a) Zéro et signe — 2 pts

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout réel x, le signe de $f(x)$ est celui de $2x - 1$. +1 pt

$$f(x) = 0 \iff 2x - 1 = 0 \iff x = \tfrac{1}{2}; \qquad f(x) < 0 \text{ si } x < \tfrac{1}{2}, \qquad f(x) > 0 \text{ si } x > \tfrac{1}{2}.$$ +1 pt

Réponse. zéro en $x = \frac{1}{2}$; f est négative avant, positive après.

b) Dérivée et variations — 4 pts

On dérive un produit, $(uv)' = u'v + uv'$, avec $u = 2x - 1$, $u' = 2$, $v = \mathrm{e}^{-x}$, $v' = -\mathrm{e}^{-x}$:

$$f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x} + (2x - 1) \cdot (-\mathrm{e}^{-x}) = (2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{-x} = (3 - 2x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$ +2 pts

Le signe de $f'(x)$ est celui de $3 - 2x$: positif pour $x < \frac{3}{2}$, nul en $\frac{3}{2}$, négatif ensuite. +1 pt

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-3/2}$	$\searrow$	0

Maximum : $f\left(\frac{3}{2}\right) = (3 - 1)\,\mathrm{e}^{-3/2} = 2\,\mathrm{e}^{-3/2} \approx 0.446$. +1 pt

Réponse. $f'(x) = (3 - 2x)\,\mathrm{e}^{-x}$; maximum en $\left(\frac{3}{2}\,;\, 2\mathrm{e}^{-3/2}\right)$.

c) Limites — 2 pts

En $-\infty$: $2x - 1 \to -\infty$ et $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$, donc $f(x) \to -\infty$. +1 pt

En $+\infty$: la forme $\frac{2x-1}{\mathrm{e}^{x}}$ est indéterminée, mais l'exponentielle l'emporte sur tout polynôme (croissance comparée) : $f(x) \to 0$. L'axe des abscisses est asymptote horizontale à droite. +1 pt

Réponse. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

d) Primitive et aire — 4 pts

Vérification. $F'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x} - (2x+1)\cdot(-\mathrm{e}^{-x}) = (-2+2x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = (2x-1)\,\mathrm{e}^{-x} = f(x)$. +1 pt

Signe. D'après a), $f(x) \geq 0$ sur $\left[\frac{1}{2}\,;3\right]$: l'aire est donc égale à l'intégrale, sans valeur absolue. +1 pt

$$\mathcal{A} = \int_{1/2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F\left(\tfrac{1}{2}\right) = -7\,\mathrm{e}^{-3} - \left(-2\,\mathrm{e}^{-1/2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{-1/2} - 7\,\mathrm{e}^{-3}. \quad +1\text{ pt}$$

Numériquement : $2\,\mathrm{e}^{-1/2} \approx 1.21306$ et $7\,\mathrm{e}^{-3} \approx 0.34851$, d'où $\mathcal{A} \approx 0.865$. +1 pt

Réponse. $\mathcal{A} = 2\,\mathrm{e}^{-1/2} - 7\,\mathrm{e}^{-3} \approx 0.865$ unité d'aire.

Erreur fréquente Dériver e^{-x} en e^{-x}, en oubliant le facteur -1 de la dérivée intérieure. On obtient alors $f'(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$, on « trouve » un minimum en $x = -\frac{1}{2}$, et tout le tableau de variation est faux. Au barème, l'erreur coûte au moins les 2 points de la dérivée et le point de l'extremum, souvent davantage. Le contrôle est immédiat : f est négative avant $\frac{1}{2}$, positive après, puis tend vers 0 : elle doit donc passer par un maximum, pas par un minimum.

Conseil de rédaction Écrivez toujours u, u', v, v' avant de dériver un produit, et mettez e^{-x} en évidence : la factorisation rend l'étude du signe immédiate. Pour l'aire, justifiez le signe de f sur l'intervalle : c'est un point du barème que beaucoup perdent.

Barème détaillé

Question	Ce qui rapporte les points	Points
a)	signe de e^{-x} justifié ; zéro et signe de f	$1+1$
b)	dérivée correcte ; signe de f' ; extremum exact	$2+1+1$
c)	limite en $-\infty$; limite en $+\infty$ justifiée	$1+1$
d)	vérification de F ; signe de f ; valeur exacte ; valeur approchée	$1+1+1+1$
Total		**12**

Les packs Kearo contiennent les sujets des sessions passées, chacun suivi d'un corrigé rédigé de cette façon : chaque étape justifiée, les points du barème, les erreurs fréquentes signalées.