Plan, distance et volume dans l'espace

Énoncé **10 points · environ 25 min**

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les points $A(1\,;0\,;2)$, $B(3\,;1\,;0)$, $C(0\,;2\,;1)$ et $P(4\,;4\,;5)$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan π passant par A, B et C. **(4 pts)**

b) Calculer la distance du point P au plan π. **(3 pts)**

c) Calculer l'aire du triangle ABC. **(1 pt)**

d) En déduire le volume du tétraèdre $ABCP$. **(2 pts)**

Corrigé détaillé

a) Équation du plan — 4 pts

Deux vecteurs directeurs du plan :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ +1 pt}$$

Un vecteur normal est donné par leur produit vectoriel :

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1) - (-2)\cdot 2 \\ (-2)\cdot(-1) - 2\cdot(-1) \\ 2\cdot 2 - 1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}. \text{ +1 pt}$$

Le plan a donc une équation de la forme $3x + 4y + 5z + d = 0$. Il passe par A : $3 + 0 + 10 + d = 0$, d'où $d = -13$. +1 pt

Vérification avec les deux autres points : B : $9 + 4 + 0 = 13$; C : $0 + 8 + 5 = 13$. Les trois points sont bien dans le plan. +1 pt

Réponse. π : $3x + 4y + 5z - 13 = 0$.

b) Distance de P au plan — 3 pts

Pour un plan $ax + by + cz + d = 0$, la distance d'un point $P(x_0\,;y_0\,;z_0)$ vaut

$$\delta(P,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \text{ +1 pt}$$

Ici : $3\cdot 4 + 4\cdot 4 + 5\cdot 5 - 13 = 12 + 16 + 25 - 13 = 40$ et $\|\vec{n}\| = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. +1 pt

$$\delta(P,\pi) = \frac{40}{5\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \approx 5.657. \text{ +1 pt}$$

Réponse. $\delta(P,\pi) = 4\sqrt{2} \approx 5.657$.

Erreur fréquente Oublier de diviser par la norme du vecteur normal, ou oublier le terme d au numérateur. On donne alors 53 (en oubliant d) ou 40 (en oubliant la norme) au lieu de $4\sqrt{2}$. Ces erreurs font perdre 2 des 3 points de la question, et le volume calculé en d) est faux à son tour. Contrôle rapide : une distance ne dépend pas de l'équation choisie. Multipliez l'équation du plan par 2 : le numérateur et la norme doublent tous les deux, le quotient ne change pas. Si votre formule ne passe pas ce test, elle est fausse.

c) Aire du triangle ABC — 1 pt

L'aire du triangle vaut la moitié de la norme du produit vectoriel déjà calculé :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \tfrac{1}{2}\,\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \tfrac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3.536. \quad \text{+1 pt}$$

Réponse. $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3.536.$

d) Volume du tétraèdre — 2 pts

La hauteur issue de P est la distance calculée en b), et la base est le triangle ABC :

$$V = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{ABC} \cdot \delta(P, \pi) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot 4\sqrt{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 2 \cdot 4}{2} = \frac{20}{3}. \quad \text{+1 pt}$$

Vérification par le produit mixte : $\overrightarrow{AP} = (3\,;4\,;3)$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 9 + 16 + 15 = 40$, d'où $V = \frac{1}{6} \cdot |40| = \frac{20}{3}$. +1 pt

Réponse. $V = \dfrac{20}{3} \approx 6.667$ unités de volume.

Conseil de rédaction Gardez les racines exactes ($5\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$) jusqu'à la fin : en d), elles se simplifient et le résultat tombe juste. Arrondir trop tôt vous aurait donné 6.67 au lieu de $\frac{20}{3}$, et coûté la précision demandée.

Barème détaillé

Question	Ce qui rapporte les points	Points
a)	vecteurs directeurs ; vecteur normal ; d ; vérification	$1 + 1 + 1 + 1$
b)	formule ; numérateur et norme ; résultat exact	$1 + 1 + 1$
c)	aire exacte	1
d)	volume ; contrôle par le produit mixte	$1 + 1$
Total		**10**

Les packs Kearo contiennent les sujets des sessions passées, chacun suivi d'un corrigé rédigé de cette façon : chaque étape justifiée, les points du barème, les erreurs fréquentes signalées.